Некоторые методы численного решения задачи Коши для дифференциальных уравнений.

Требуется определить сеточную функцию y_i отвечающую задаче:

$$\dot{y} \equiv \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad\qquad y(x_0) = y_0$$

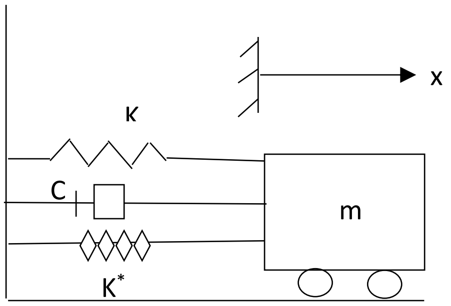
Метод Эйлера: $y_{i+1} = y_i + h*f(x_i,y_i)$

Один из методов Рунге-Кутта 2-го порядка точности
$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, $\Delta y_i = 0.5*h*(k_1 + k_2)$,
$k_1 = f(x_i,y_i)$, $k_2 = f(x_i + h,y_i + k_1)$.

Один из методов Рунге-Кутта 4-го порядка точности
$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, $\Delta y_i = (1/6)*h*(k_1 + 2*k_2 + 2*k_3 + 4*k_4)$,
$k_1 = f(x_i,y_i)$, $k_2 = f(x_i + h/2, y_i + (h/2)* k_1)$,
$k_3 = f(x_i + h/2, y_i + (h/2)* k_2)$, $k_4 = f(x_i + h, y_i + h* k_3)$,

Задача № К01

Устройство, показанное на рисунке, состоит из массы m, связанной с жесткой стенкой через пружину постоянной жесткости К, демпфер с коэффициентом демпфирования С и пружиной с нелинейной характеристикой, создающей восстанавливающую силу, равную произведению постоянной $К^*$ на смещение в третьей степени.



Подготовить программу для моделирования движения механической системы в интервале времени $0 \leq t \leq 1$ сек. Параметры системы имеют следующие значения: К = 2.0 $^{м}/_{см}$, $К^*$ = 1.0 $^{н}/_{сек^2}$, С = 0.15 $^{н*с}/_{см}$, m = 1.0 кг = 0.01 $^{н*с^2}/_{см}$

Начальные условия заданы в виде: x (0) = 10 см, x^* (0) = 0.

Решение

Движение системы описывается дифференциальным уравнением $m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + K^*x^3 = 0$.

Сведем дифференциальное уравнение второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка. В результате получим:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = V \qquad\qquad x(0) = 10$$

$$\dot{V} \equiv \frac{dV}{dt} = -\left(\frac{C}{m}V + \frac{K}{m}x + \frac{K^*}{m}x^3\right) \qquad\qquad V(0) = 0$$

Продемонстрируем решение задачи использованием двух разностных схем Рунге-Кутта первого и второго порядка точности.

Система разностных уравнений, при использовании для каждого разностного уравнения, схемы первого порядка:

$X_{i+1} = X_i + \tau * V_i$

$V_{i+1} = V_i - \tau*(C/m *V_i + K/m * X_i + K^*/m * (X_i)^3)$

Система разностных уравнений при использовании для каждого разностного уравнения схемы второго порядка (введены вспомогательные сеточные функции Xb и Vb):

$Xb_{i+1} = X_i + \tau * V_i$

$Vb_{i+1} = V_i - \tau*(C/m *V_i + K/m * X_i + K^*/m * (X_i)^3)$

$X_{i+1} = X_i + (\tau/2)*(V_i + Vb_{i+1})$

$V_{i+1} = V_i - (\tau/2)*((C/m *V_i + K/m * X_i + K^*/m * (X_i)^3) +$

$(C/m *Vb_i + K/m * Xb_i + K^*/m * (Xb_i)^3)$

Для решения задачи (схема Эйлера) воспользуемся GNU Octave.

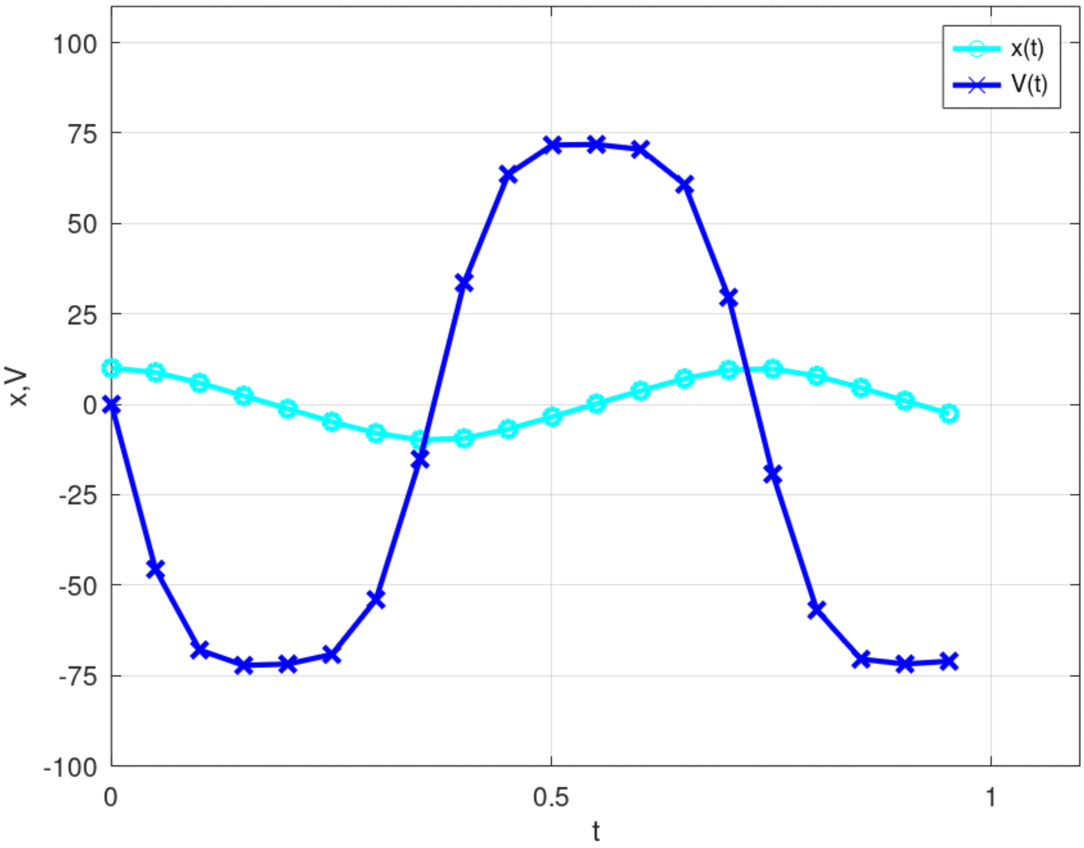
```
%    Моделирование движения мех. системы   23.11.2021
x = 10;  V = 0; C =0.15; K = 2; KK =1.0; m=1.0;
tstart = 0;    tfinis =1;
n  = 600;    %  Количество разбиений интервала tfinis-tstart
ng = 30;     %  Количество точек графика tay
tay= (tfinis-tstart)/ (n-1);
xnew = x;  Vnew = V;
k = 0.01;
y0 = 100;
tay=(tfinis-tstart)/(n-1);  %Вычисление шага

%Вычисление значение функции в узловых точках методом  Эйлера
kprint = 1;   xprint(1) = x; Vprint(1) = V; tprint(1) = 0;
for i=1:(n-1)
 xnew = x + tay*V;
 Vnew = V - tay*(C*V + K*x+ KK*x^3)/m ;
 if (kprint*ng == i)
    kprint = kprint+1;
    tprint(kprint)=i*tay; xprint(kprint) = xnew; Vprint(kprint) = Vnew;
      %  Печать результатов
   printf(" t = %f   \t x = %f \t  V = %f \t  \n",...
```

```
        tprint(kprint), xprint(kprint),Vprint(kprint));
 endif
 x = xnew;
 V = Vnew;
endfor
   okno1=figure();
cla;
pol=plot(tprint,xprint,"-oc;x(t);", tprint,Vprint,"-xb;V(t);" );
set(pol,'LineWidth',2);
set(gca,'xlim',[0,1.1]);
set(gca,'ylim',[-100,110]);
set(gca,'xtick',[0:0.5:1.1]);
set(gca,'ytick',[-100:25:100]);
grid on;
xlabel('t');ylabel('x,V');
```

Листинг с решением

```
t = 0.050083          x = 8.827720     V = -45.639218
 t = 0.100167          x = 5.897172     V = -67.930900
 t = 0.150250          x = 2.349678     V = -72.191824
 t = 0.200334          x = -1.260732    V = -71.820114
 t = 0.250417          x = -4.816435    V = -69.175877
 t = 0.300501          x = -7.997951    V = -54.010223
 t = 0.350584          x = -9.859588    V = -15.170485
 t = 0.400668          x = -9.411563    V = 33.637583
 t = 0.450751          x = -6.891281    V = 63.599144
 t = 0.500835          x = -3.447909    V = 71.681537
 t = 0.550918          x = 0.155494     V = 71.838330
 t = 0.601002          x = 3.731227     V = 70.473055
 t = 0.651085          x = 7.090293     V = 60.805428
 t = 0.701169          x = 9.485473     V = 29.544175
 t = 0.751252          x = 9.802966     V = -19.304613
 t = 0.801336          x = 7.824422     V = -56.935459
 t = 0.851419          x = 4.561730     V = -70.465325
```



Программа, иллюстрирующая решение задачи на языке Си

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
   double x = 10, V = 0, C =0.15, K = 2, KK =1.0, m=1.0;
   double xx, VV;
   double x2= 10, xx2, xb, xxb, V2=0, VV2,Vb, VVb;      // Для схемы 2-го порядка точности
   double time_mod = 0, time_finis= 1.0;
   int num_print = 25, num_mod = 50;  // Кол-во печати, кол-во проходов по циклу
   double tay = (time_finis/(num_print*num_mod));
   cout<<"    Схема 1 порядка точности  "<< "          Схема 2 порядка точности "<< "\n";
   cout<<"      (Схема Эйлера)  "<< "                    (Мод.схема Эйлера)  "<< "\n";
   cout<<"Время,с  "<< " x, см   "<<"   V, см/с  "<< "        "<< "   x, см   "<<"      V, см/с  "<< "\n";
   for (int k=0; k<num_print; k++){
   for (int i=0; i<num_mod; i++)      // Цикл по времени для схемы 1-го порядка
   { time_mod += tay;                // Моделируемое время
     xx    = x+tay*V;
     VV    = V-tay*(C/m*V+K/m*x+KK/m*x*x*x);
     x     = xx;
     V     = VV;
   }
```

```
    cout<<time_mod<<"      "<< x<<"      "<<V<<"   ";

    for (int i=0; i<num_mod; i++)       // Цикл по времени для схемы 2-го порядка
    { xxb   = x2+tay*V2;
      VVb   = V2-tay*((C/m)*V2+(K/m)*x2+(KK/m)*x2*x2*x2);
      xx2   = x2+0.5*tay*(V2+VVb);
      VV2   = V2-0.5*tay*( ((C/m)*V2+(K/m)*x2+(KK/m)*x2*x2*x2)+
((C/m)*VVb+(K/m)*xxb+(KK/m)*xxb*xxb*xxb) );
      x2    = xx2;
      V2    = VV2;
    }
    cout<<"         "<< x2<<"       "<<V2<<"\n";
      }    return 0;
}
```

Листинг с результатами работы программы

Время,с	Схема 1 порядка точности (Схема Эйлера) x, см	V, см/с	Схема 2 порядка точности (Мод.схема Эйлера) x, см	V, см/с
0.04	9.22963	-37.7947	9.21684	-37.6271
0.08	7.19667	-61.4775	7.1868	-61.0358
0.12	4.52684	-70.2617	4.53415	-69.6942
0.16	1.67824	-71.5725	1.70816	-70.9913
0.2	-1.17846	-71.1897	-1.12525	-70.6139
0.24	-4.00504	-69.6774	-3.92873	-69.1425
0.28	-6.68047	-62.3754	-6.58337	-62.0632
0.32	-8.83037	-42.0741	-8.72339	-42.3716
0.36	-9.86773	-7.24294	-9.77759	-8.51199
0.4	-9.39503	30.7231	-9.35829	28.6475
0.44	-7.59942	56.8893	-7.64056	54.6552
0.48	-5.06569	67.8908	-5.1868	65.9319
0.52	-2.29016	70.105	-2.48331	68.3854
0.56	0.511373	69.8608	0.250964	68.2035
0.6	3.29173	68.8841	2.96659	67.381
0.64	5.97195	63.8318	5.59808	63.1729
0.68	8.26113	47.9424	7.89239	49.3989
0.72	9.62434	17.3792	9.3604	21.7781
0.76	9.58045	-20.2333	9.52159	-13.9785
0.8	8.14381	-49.8496	8.32143	-44.0305
0.84	5.81589	-64.4753	6.18919	-60.2501
0.88	3.13612	-68.4428	3.65042	-65.3956
0.92	0.391842	-68.5395	1.01849	-65.8595
0.96	-2.34027	-67.9488	-1.60826	-65.4203
1	-5.01638	-65.0295	-4.19881	-63.6185